

基于虚拟仪器的电路实验

雷逸鸣

一、虚拟仪器在物理实验中的应用

1 定值电阻阻值的测量

1.1 $R_x \approx 50\Omega$ 电阻阻值的测量

取实验室中 $R_x \approx 50\Omega$ 的电阻测量其电阻阻值，得到的数据如下图所示：

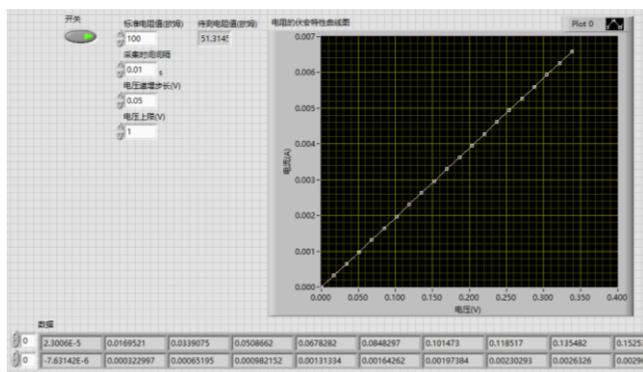


图1 定值电阻 $R_x \approx 50\Omega$ 的 $I - U$ 关系图
在实验过程中仅保留了一次测量结果：

$$R_x = 51.3\Omega$$

注：事实上，通过三次测量结果推断测量结果的不确定度的方法是不准确的，这种方法仅求得了A类不确定度，而本实验中最大误差来源是“标准电阻”阻值的不确定度。这一点可以通过对 R_x 的测量间接评估得出。

1.2 $R_x \approx 1k\Omega$ 电阻阻值的测量

取实验室中 $R_x \approx 1k\Omega$ 的电阻测量其电阻阻值，得到的数据如下图所示：

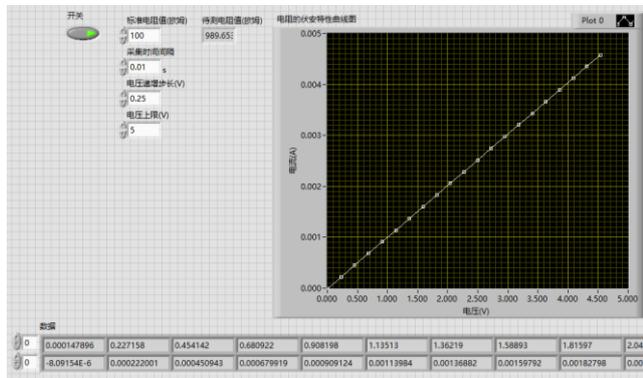


图2 定值电阻 $R_x \approx 1k\Omega$ 的 $I - U$ 关系图
在实验过程中仅保留了一次测量结果：

$$R_x = 989\Omega$$

2 二极管正反向伏安特性曲线

2.1 测量程序：

实验过程中使用的实验程序如图3所示：

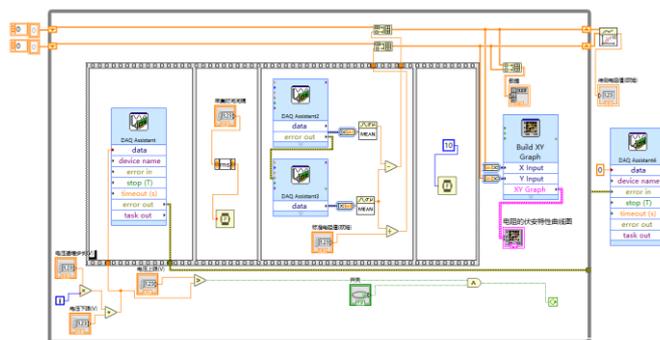


图3 二极管伏安特性测量程序架构图

2.2 实际测量：

使用图3所示的程序，绘制出二极管的伏安特性曲线如图4所示。

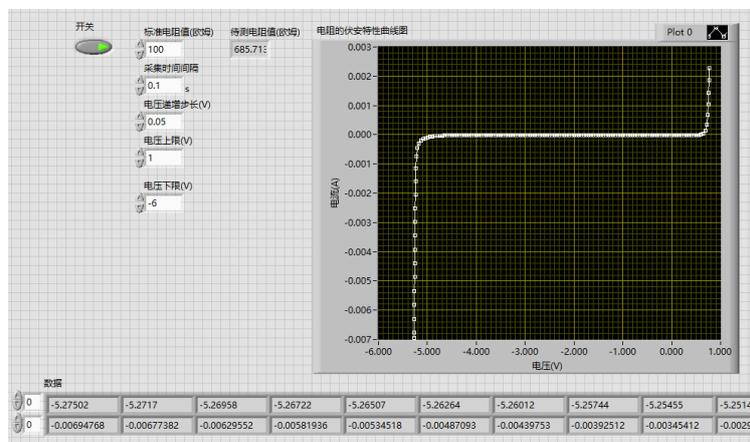


图4 二极管伏安特性测量结果

2.3 程序实现方法：

在测量电阻阻值的程序的基础上，添加电压的下限的选项，使程序可以测量二极管的反向伏安特性。同时，为更好的描画二极管反向截止电压以及正向导通电压，将程序的步长取值减小。

二、电路综合实验

3 电感元件的参数测量

使用实验室提供的程序测量结果如下：

3.1 $L_1 = 18\text{mH}$ 电感参数测量:

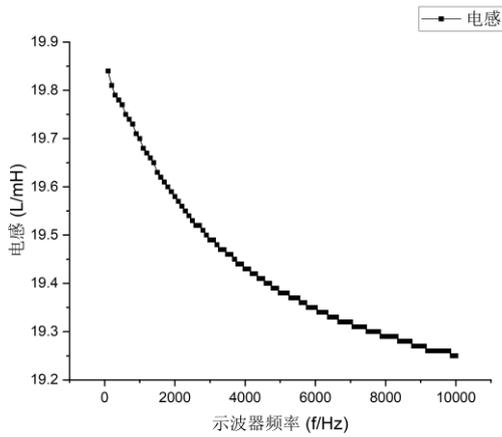


图 5 18mH 电感大小与频率关系图

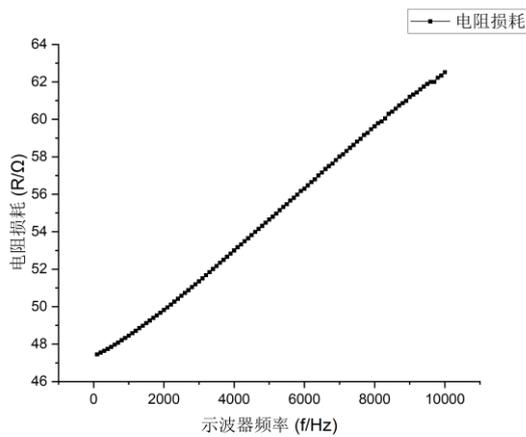


图 6 18mH 电感欧姆损耗与频率关系图

3.2 $L_1 = 16\text{mH}$ 电感参数测量:

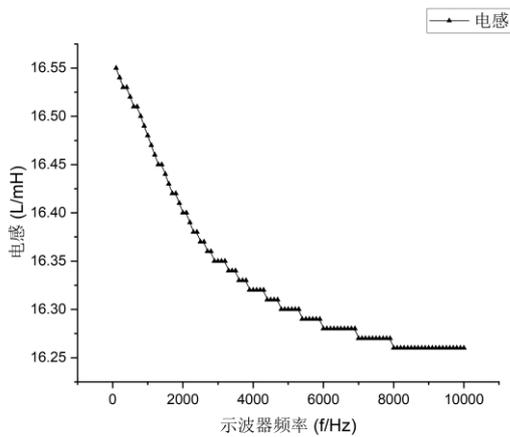


图 7 16mH 电感大小与频率关系图

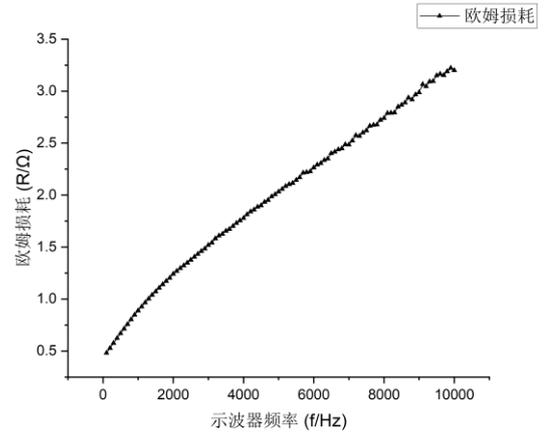


图 8 16mH 电感欧姆损耗与频率关系图

4 Fano 共振实验

4.1 电路图:

实验过程中实用的电路图如下图 9 所示:

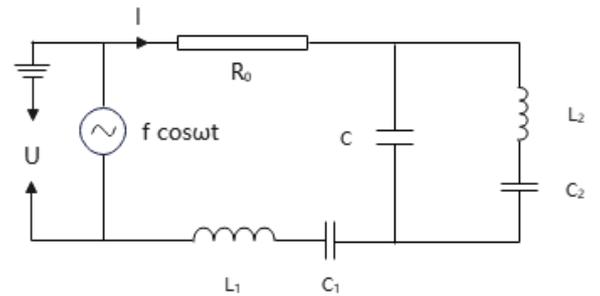


图 9 Fano 共振实验装置图

4.2 元件参数:

图 9 电路中各元件参数如下:

$$R_0 = 500\Omega$$

$$C = 0.22\mu\text{F}$$

$$C_1 = 0.047\mu\text{F}$$

$$C_2 = 0.05\mu\text{F}$$

L_1 为标称值为 18mH 的电感

L_2 为标称值为 16mH 的电感

4.3 实验数据:

由以上装置测得幅频特性及相频特性曲线如下图所示:

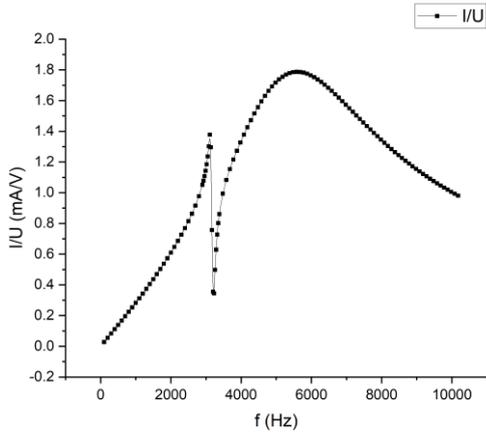


图 10 幅频特性曲线

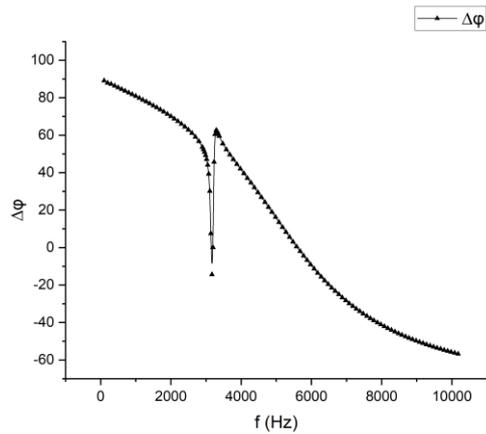


图 11 相频特性曲线

通过观察图 10，我们可以发现在 3000Hz 附近，两特性曲线存在一反常变化，幅频特性曲线的变化体现为对称的图像上出现了一个反对称的抖动。接下来，我们将研究这一现象。

5 Fano 共振理论分析

5.1 理论模型

两个存在耦合的谐振子的运动方程可写为：

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = f(t) + gx_2$$

$$\ddot{x}_2 + 2\gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = gx_1$$

对于单频激发， $f(t)$ 可以表示为：

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t}$$

Fano 共振描述的是当运动方程满足 $g \ll \omega \sim \gamma$ 时，特性曲线表现出的反常行为。

5.2 模型求解

显然，上述理论模型可以被解析求解，但为更好的揭露其物理本质，我们接下来将通过逐阶近似的方

法近似求解。

注意到，稳态解的频率应为 ω 。由于 g 相较 ω 与 γ 唯一小量，我们首先求解 x_1 的阻尼受迫振动项：

$$x_1 = \frac{f_0}{(\omega_1^2 - \omega^2) + 2i\gamma_1\omega} \exp i\omega t$$

将其代入关于 x_2 的微分方程，得：

$$x_2 = \frac{gf_0}{(\omega_1^2 - \omega^2) + 2i\gamma_1\omega} \cdot \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega^2) + 2i\gamma_2\omega} \exp i\omega t$$

再将 x_2 的最高阶小量代入 x_1 的微分方程：

$$x_1 = \frac{f_0}{(\omega_1^2 - \omega^2) + 2i\gamma_1\omega} \left(1 + \frac{g^2}{(\omega_2^2 - \omega^2) + 2i\gamma_2\omega} \right) \exp i\omega t$$

上式因子中的 $\frac{g^2}{(\omega_2^2 - \omega^2) + 2i\gamma_2\omega}$ 项，即来源于谐振子 2 与谐

振子 1 的弱耦合，该项的作用为在原幅频特性曲线的基础上，在谐振子 2 的本征频率附近增加了一个峰因子。

5.3 数值模拟

为展示理论所描述的现象，取 $g = 3$ ， $\omega_1 = 20$ ， $\omega_2 = 12$ ， $\gamma_1 = 6$ ， $\gamma_2 = 0.5$ 作图：

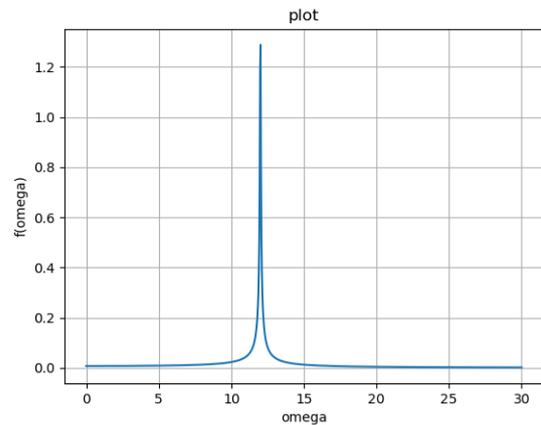
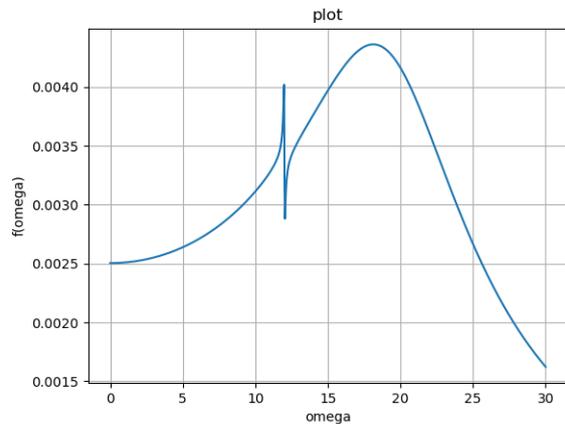
图 12 $\frac{g^2}{(\omega_2^2 - \omega^2) + 2i\gamma_2\omega}$ 因子随频率变化关系

图 12 谐振子 1 振幅随频率变化关系

注意到：Fano 共振现象需满足的条件为谐振子 1 的半峰宽较大，谐振子 2 的半峰宽较小，体现为： $\gamma_1 \gg \gamma_2$ 。同时，反常行为出现在谐振子 2 的共振频率附近，原因是该反常行为来源于图 12 的因子，而该因子来源于谐振子 2。

需要指出，我们在模拟是为使现象明显，耦合因子远远小的条件实际上是没有较好满足的。这一方面体现了我们近似求解对理解该物理现象的重要意义；同时，也说明了在实验上观测到的 Fano 共振现象往往不够显著，往往当谐振子 2 的谐振频率大于谐振子 1 的谐振频率时，该现象才能较好体现。

5.4 对本实验的讨论

在本实验中，通过共用元件实现两个 RLC 振荡电路的耦合，根据如图 9 所示电路图。对图中电路列出电路方程，有：

$$L_1 \dot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right) q_1 - \frac{q_2}{C} = \epsilon(t)$$

$$L_2 \dot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right) q_2 - \frac{q_1}{C} = 0$$

观察发现，上式经如下变换与 Fano 共振表达式一致：

$$x_i = \sqrt{L_i} q_i \quad \gamma_i = \frac{R_i}{L_i} \quad \omega_i^2 = \frac{1}{L_i} \left(\frac{1}{C_i} + \frac{1}{C}\right) \quad g^2 = \frac{1}{C^2 L_1 L_2}$$

由于实验中谐振子 1 的品质因数较小，谐振子 2 的品质因数较大，同时满足弱耦合条件。因此，实验中的情景符合 Fano 共振的条件。

6 Fano 共振的应用

在电光频梳领域，常使用谐振环之间的耦合实现光波导频率的等间隔分立，如图 13：

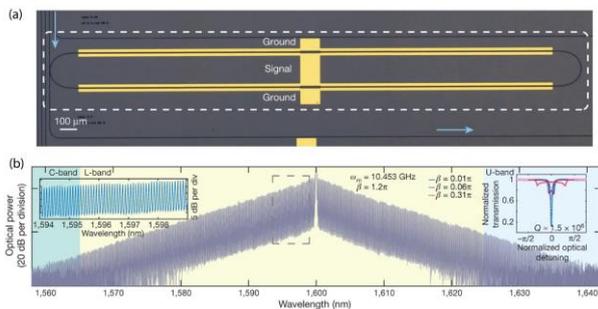


图 13 On-Chip LN E-O combs generator. a) Micrograph of the fabricated racetrack resonator. b) Frequency spectrum of the E-O combs. a,b) Reproduced with permission.[1] Copyright 2019, Springer Nature.

通过在谐振环 2 上耦合一谐频谐振环 3 可以实现能级劈裂，进而在频移越变过程中的截止，如图

14:

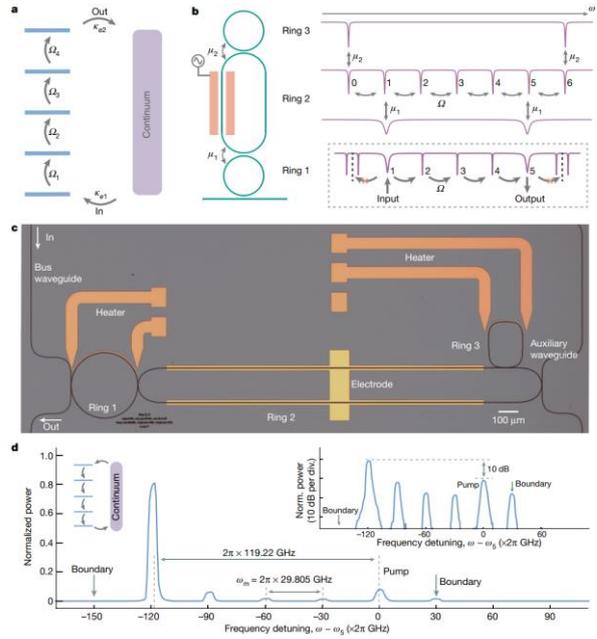


图 14 Cascaded frequency shifting[2]

在实验中，我们尝试使用两个耦合谐振环复现图 13 所示现象，各参量大小及电路图如图 15 所示：

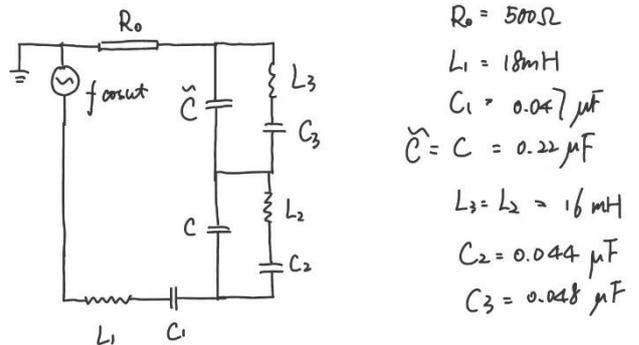


图 15 电路图及各元件参数

上述电路图测得的幅频特性曲线如图 16 所示：

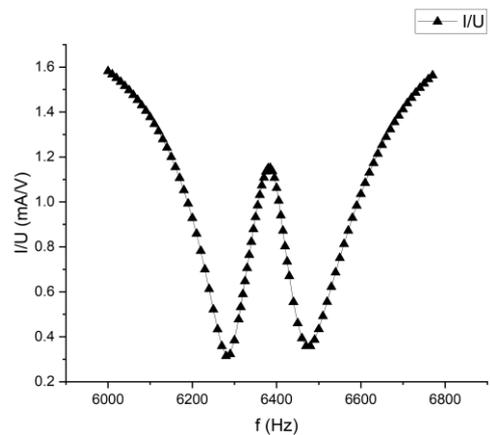


图 16 模拟频梳幅频特性曲线

7 参考文献

- [1] M. Zhang, B. Buscaino, C. Wang, A. Shams-Ansari, C. Reimer, R. Zhu, J. M. Kahn, M. Loncar, *Nature* 2019, 568, 373.
- [2] On-chip electro-optic frequency shifters and beam splitters. Y. Hu et.al. *Nature*. 2021. 587-593