

液滴显微镜

雷逸鸣¹, 肖涵²

(北京大学物理学院, 北京 100871)

摘要: 透过液滴观察物体时, 可以观察到物体被放大的现象, 放大倍率及成像分辨率会随着液滴形态的变化而变化. 分析了物体表面液滴的形态, 使用几何光学对成像原理及像的性质进行了探究, 得到液滴形状及成像规律. 利用 python 计算了光线轨迹, 证实了放大倍率与液滴体积成正相关的关系, 结果符合理论公式.

关键词: 液滴; 显微镜; 几何光学; IYPT2024 年第 2 题

2024 年 IYPT 的第 2 题为 Droplet Microscope^[1]. 通过观察放置在玻璃表面上的单个液滴, 可以观察到液滴充当成像系统. 研究这种镜头的放大倍率和分辨率. 当使用相机或者人眼观察时, 微小的物体会被放大, 同时像的轮廓会模糊虚化. 承接前人对液滴形状的研究[2], 我们详细探讨了成像放大率、分辨率的影响因素, 并对液滴显微镜进行了改进.

1 液滴显微镜现象简介

将一滴液滴在玻璃板上, 调整合适的物距用眼观察, 可以明显的看到物体被放大的现象.

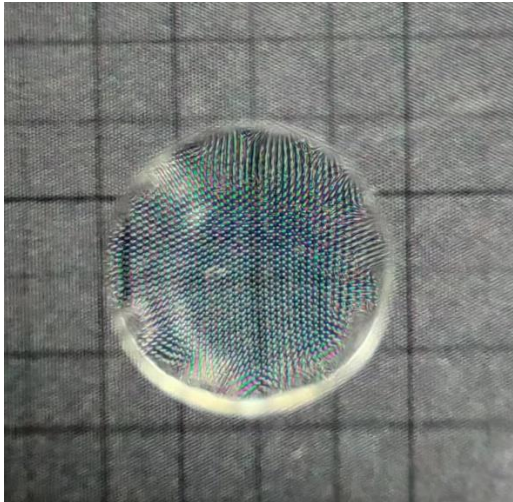


图 1 利用相机拍摄的液滴对显示屏的放大行为

图 1 中央圆形区域就是一滴液滴, 液滴后面显示屏上画有黑色的网格. 可以看到, 经过液滴的作用, 网格宽度被明显的放大. 同时, 我们也可以发现显示屏上的 LED 经过液滴放大, 也被相机拍摄了下来.

2 液滴显微镜的理论计算

2.1 液滴形状的计算

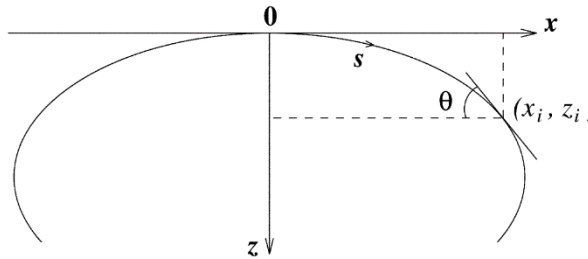


图 2 计算液面使用的坐标系

记液面两侧压强差为 Δp , 液体表面张力系数为 γ , R_1 与 R_2 为主要曲率半径. 根据杨-拉普拉斯方程:

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1)$$

将方程应用于我们研究的体系之中, 可以得到:

$$2\gamma b + \rho g z = \gamma \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{\sin \theta}{x} \right) \quad (2)$$

其中 b 为初始点处曲线曲率, ρ 为液体密度, g 为重力加速度.

体系的几何关系:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (3)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \theta \quad (4)$$

数值求解得到的液滴形态如图 3 所示.

收稿日期: 2023-12-10.

作者简介: 雷逸鸣¹(2006-), 男, 辽宁人, 本科生.

肖涵²(2005-), 男, 湖南人, 本科生.

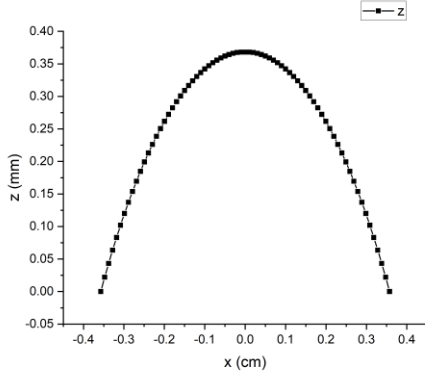
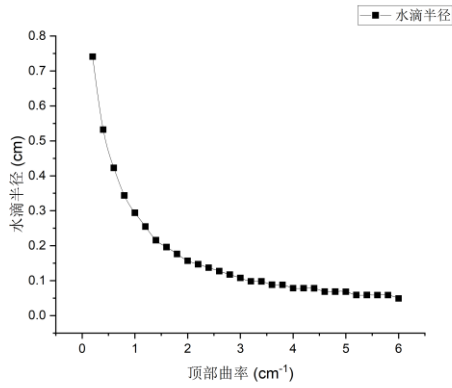


图 3 数值模拟的液滴形状

同时, 我们得到液滴半径 R 随顶部曲率 b 变化关系如图 4 所示:

图 4 液滴半径 R 与顶部曲率 b 关系

2.1 计算放大率

通过计算液滴形状, 我们发现液滴并不是理想的成像系统, 光线经液滴所成的像并不是理想的. 接下来, 我们对光线的折射用几何光学进行了分析.

记液滴中心厚度为 z_0 , 物与玻璃片距离为 u , 像与液滴上表面距离为 v (均以原理纸面方向为正), 可求得成像公式:

$$\left(u + \frac{z_0}{u} - f\right)(v - f) = f^2 \quad (5)$$

其中, $f = (n - 1)b$.

2.2 计算分辨率

对于分辨率我们采用的计算方法是将物点不同角度发出的光线模拟出来, 计算出不同角度光线组成的包络面, 取包络面的横截面积最小的圆的半径为像的发散半径 R .

设透镜的放大率为 β , 易得透镜最小分辨尺寸 Δx 与发散半径 R 的关系式:

$$\Delta x \cdot \beta \leq R \quad (6)$$

由此, 得到透镜的角分辨率 $\theta_{\min}$ 的公式:

$$\theta_{\min} \approx \frac{\Delta x}{\beta \cdot u} \quad (7)$$

其中, u 为像的物距.

对图 3 算得的光学系统采用如上方法算得的包络面如图 5 所示:

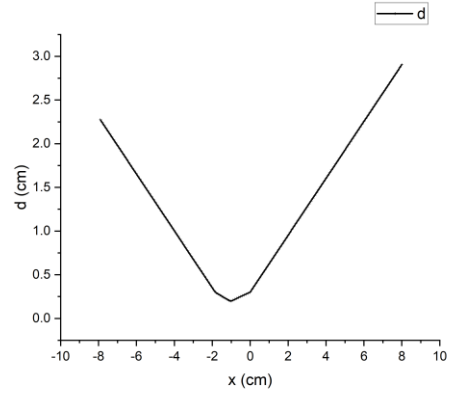


图 5 不同角度的光线组成的包络面

3 实验操作步骤

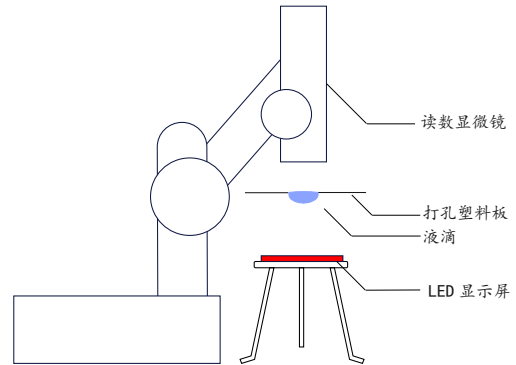


图 6 测量液滴光学性质实验装置图

在实验中, 我们使用如图 6 所示装置完成测量. 其中塑料板的厚度为 0.2mm, 通过剪有开孔的纸箱进行支撑.

3.1 测量物距像距

使用读数显微镜分别直接测量物(LED 显示屏)、透过液滴所成像, 及玻璃片的高度作差, 算出成像系统的物距和像距.

3.2 测量液滴成像放大率

我们通过直接测量原物及像的周期, 取 6 组等间隔数据拟合斜率, 算得物和像的大小, 并将两式做比, 求得液滴放大率.

说明: 通过物距像距做比的方法也可以算得放大率, 这一放大率与直接测得的放大率相差约 5%.

这是由于(5)式液滴厚度的存在,因此需要修正,修正后的放大率与实际测得的放大率误差在 0.3% 以内.

3.3 测量液滴成像分辨率

我们通过先单独测量单个 LED 的宽度 d_1 ,再单独测量经液滴成像后单个 LED 的宽度 d_2 ,用 d_2 减去 d_1 与放大率的积,求得成像系统最小可分辨尺寸,代入(6)(7)两式计算得液滴成像的角分辨率.

4 理论公式的实验检验

4.1 液滴形状

实验中,我们发现液滴与玻璃的接触角会因液滴大小不同而发生波动^[3].通过比较不同浸润角的液滴照片,我们发现液滴的形态与其顶部曲率的关联较大,因此,我们选取一张液滴照片与模拟结果进行比对.



图 7 原装置液滴

我们发现图 3 的计算结果与图 7 的实验结果较好符合.

4.2 液滴成像放大率与分辨率

我们控制物距不变,改变液滴的大小,测得液滴的放大率和分辨率与液滴大小的关系如下:

表 1 物距为 13.1cm 时,液滴成像性质与液滴大小关系

液滴半径(cm)	放大率	角分辨率
0.5212	1.957	0.0048
0.5123	1.871	0.0045
0.4875	1.414	0.0031

在这种情况下液滴放大率较小,且成像分辨率较低.因此,改进实验装置十分必要.

5 改进后的实验装置

5.1 装置示意图

改进后的装置如图 8 所示:

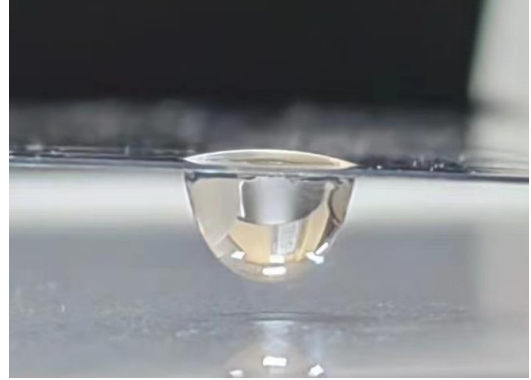


图 8 改进装置的液滴

我们将塑料片打出直径为 6mm 的孔,在孔中覆以液膜,由此得到如图所示的成像系统.

对此系统,我们将液面计算公式(2)改为:

$$2\gamma b - \rho g z = \gamma \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{\sin \theta}{x} \right) \quad (8)$$

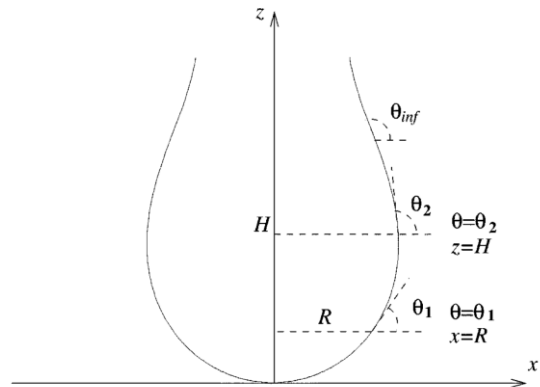


图 9 计算下液面使用的坐标系

将理论模拟结果与实际形状比对:

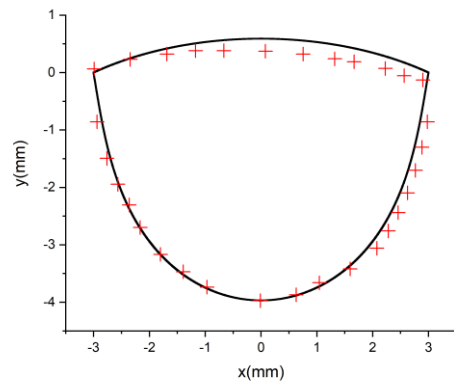


图 10 液滴的理论与实验结果比较

图 10 中黑线表示液滴表面理论计算的结果, 红十字表示通过实验测得的液滴表面形状. 我们发现, 理论模拟的液滴形状可以较好地反应实际的液滴情况, 差距在实验测量误差范围以内.

5.2 改进装置的放大率及分辨率

我们分控制液滴大小不变改变物距, 控制物距不变改变液滴大小测得了多组实验数据如下:

表 2 物距为 13.1cm 时, 液滴成像性质与液滴大小关系

像距 (cm)	放大率	角分辨率
17.8	1.341	0.00022
22.8	1.523	0.00021
26.6	2.106	0.00028
31.2	2.529	0.00014
38.1	3.105	0.00026

表 3 控制液滴大小不变, 改变物距, 测得的液滴成像性质

物距(cm)	像距 (cm)	放大率	角分辨率
8.7	14.8	1.547	0.00071
9.6	15.6	1.656	0.00078
10.8	17.9	1.781	0.00080
11.8	19.4	1.657	0.00012
12.8	20.6	1.463	0.00021
13.8	21.6	1.605	0.00022
15.8	23.2	1.645	0.00013
17.8	32.8	1.872	0.00036

5.3 改进装置与原实验装置对比

观察比较表 1 和表 2, 我们可以发现改进后的实验装置的角分辨率与原装置相比, 提升了一个数量级.

同时, 由于塑料孔对液滴直径的限制, 液滴在体积增加时并不会散开, 因此液滴中心的曲率可以变得更大, 放大率的范围也更广.

6 由液滴制成的显微镜

我们已经将了解了液滴的光学性质, 接下来, 我们利用液滴的光学性质制造一个液滴显微镜.

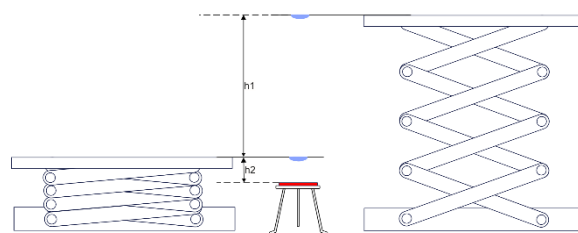


图 11 使用液滴制造的显微镜装置示意图

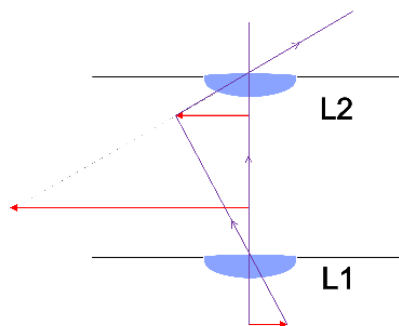


图 12 液滴显微镜成像光路图

6.1 装置示意图

我们使用支架支撑, 将两滴液滴竖直共轴放置如图 11 所示. 实验时, 取 $h_1 = 4.0\text{cm}$, $h_2 = 1.5\text{cm}$, 进行复现实验时, h_1, h_2 大小选取应根据液滴焦距进行适当调整. 使用液滴显微镜观察到的图像如图 13 所示.



图 13 使用液滴制造的显微镜装置效果图

6.2 显微镜成像效果

观察图 13 可以发现, 物体 (LED) 经两滴液滴的作用, 已经明显放大, 但同时, 成像效果并不理想, 像与物相比存在较大的畸变. 接下来, 我们将讨论畸变产生的原因及其改进方案.

6.3 畸变产生原因

畸变主要是由液滴表面不平整导致的. 不平整来源于两方面: 一方面, 由于塑料膜厚度与实际实验时使用的液滴厚度在同一数量级, 故计算液滴成像性质时将塑料膜近似为无限薄在此时是不适用的; 另一方面, 由于打孔器在打孔时会是孔边缘变得粗糙, 进而使液滴的边界失去对称性, 进而导致液面的不规则.

6.4 减小畸变的方法

对于由于塑料膜过厚导致的成像的畸变, 我们可以通过使用更薄的塑料膜 (0.05mm), 并通过较厚的塑料进行支撑, 改进装置如图 14 所示.

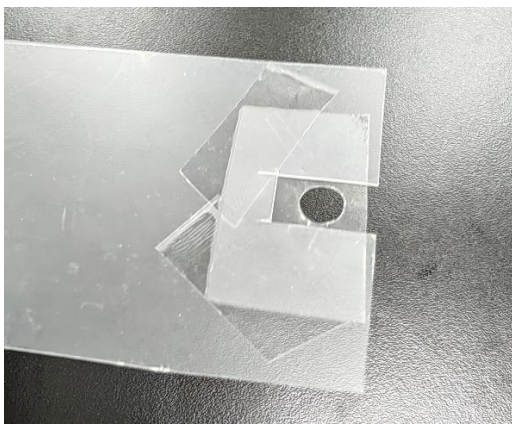


图 14 改进装置图示

对于孔边缘粗糙导致的成像的畸变, 我们的解决方案是在薄塑料膜的上下分别垫有厚塑料膜, 这样, 我们在薄塑料膜上打出的孔洞会更加平整 (见图 15). 在现有实验条件下, 我们可以通过多打一些孔洞, 由于孔洞的粗糙程度存在随机性, 我们可以在这些孔洞中选取最为光滑的孔洞进行实验.

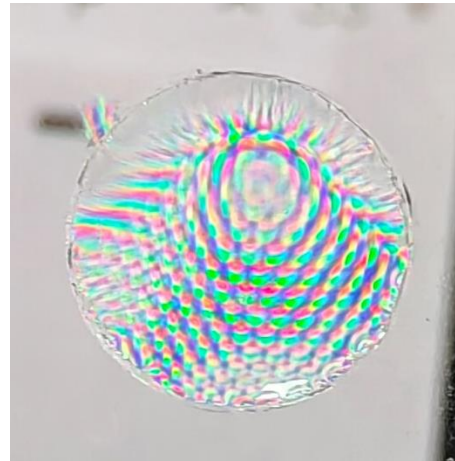


图 15 液滴显微镜在改进后的成像效果

可以看出改进后的实验装置相较于原 (图 13) 装置的成像效果有了明显改进.

7 结 论

我们发现液滴是一个成像分辨率较大, 易于获取制备的放大系统. 对于同样的物距, 在控制接触角一定 (即置于玻璃片上的情况) 时, 液滴越小, 放大率越大; 在控制液滴半径一定 (即塑料孔中悬挂液滴的情况) 时, 液滴越大, 放大率越大.

本文在前人计算液滴表面方程的基础上, 对大尺寸液滴的光学性质进行了研究, 同时使用液滴构造了一个简易的显微成像系统.

参考文献:

- [1] Problems for the 37th IYPT 2024 [EB/OL]. [2023-7-25]. <https://www.iypt.org/problems/problems-iypt-2024/>
- [2] O.I.del Río, A.W. Neumann. Axisymmetric Drop Shape Analysis: Computational Methods for the Measurement of Interfacial Properties from the Shape and Dimensions of Pendant and Sessile Drops[J]. Journal of Colloid and Interface Science, 1997, vol 196:136-147
- [3] Shi. Z, Zhang, Y, Liu. M, Dorian. A.H. Hanaor, Gan. Y. Dynamic contact angle hysteresis in liquid bridges.[J]. Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. Vol.555 (2018), 365-371

Droplet Microscope

LEI Yi-ming¹, XIAO Han²

(School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: By looking through a single water droplet, one can observe that the droplet acts as an imaging system. The magnification and resolution of such lens differs as the shape of droplet changes. The morphology of droplets on the object surface was analyzed, and the imaging principle and properties of the image were explored using geometric optics. The shape of the droplet and the imaging law were obtained. The ray trajectory was calculated using Python, confirming the positive correlation between magnification ratio and droplet volume, which is consistent with the theoretical formula.

Keywords: droplet; microscope; geometric optics; IYPT2024-P2

收稿日期: 2023-12-10.

作者简介: 雷逸鸣¹ (2006-), 男, 辽宁人, 本科生.
肖涵² (2005-), 男, 湖南人, 本科生.

附录：

